$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-ix}}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$$

複素解析による解法

まず、複素関数に拡張して考えていく。上式を複素関数積分に拡張すると

$$\oint \frac{ae^{-iz}}{a^2+z^2}dz = \oint \frac{ae^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}dz \tag{1}$$

となる。特異点として一位の極 $\pm ia$ の存在することがわかる。この積分自体は、留数定理を用いることで簡単に解くことができる。まず、ここでは各特異点における留数を求める。

- 特異点 ia

$$\mathrm{Res[f(z), ia]} = 2\pi i \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{ae^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{e^a}{2i} \tag{2}$$

- 特異点 $-ia$

$$\mathrm{Res[f(z), -ia]} = 2\pi i \lim_{z\to -ia}(z+ia)\frac{ae^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)} = -\frac{e^{-a}}{2i} \tag{3}$$

留数が求まったので、留数定理を用いてこの積分を解く。ここでは下図のような積分経路 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$ を考える。共に積分経路は単一閉曲線であり、半径 R の半円を成しており、内部に特異点を 1 つ含んでいる。また経路 A_1B_1、A_2B_2 は実軸上の積分を表している。

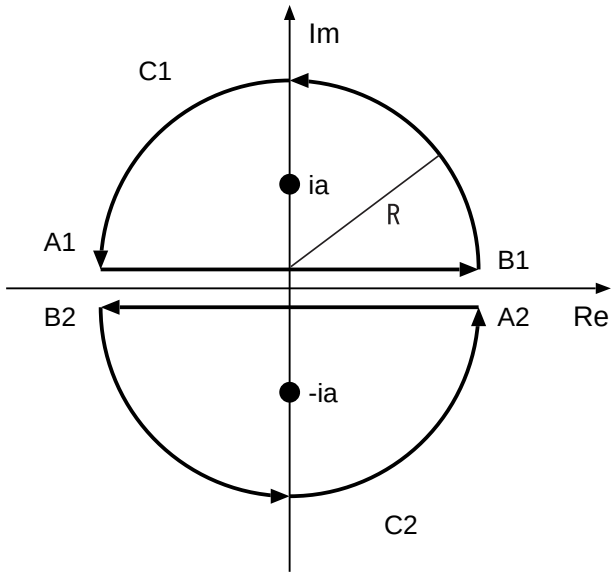

Fig.1：積分経路 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$

- 経路 $A_1B_1C_1$ の積分

$$\oint_{A_1B_1C_1} \frac{ae^{iz}}{a^2+z^2}dz = 2\pi i\ \mathrm{Res[f(z), ia]}$$
$$= 2\pi i\Big(\frac{e^a}{2i}\Big)$$
$$= \pi e^a \tag{4}$$

- 経路 $A_2B_2C_2$ の積分

$$\oint_{A_2B_2C_2} \frac{ae^{iz}}{a^2+z^2}dz = 2\pi i\ \mathrm{Res[f(z), -ia]}$$
$$= 2\pi i\Big(-\frac{e^{-a}}{2i}\Big)$$
$$= -\pi e^{-a} \tag{5}$$

となる。実関数では複雑な積分も複素関数へと拡張し、留数を用いることで極めて簡単に解くことができる。次に各経路を実軸上と円弧の部分の 2 つに分けて考える。こうすることの意味は、もし円弧の部分の積分がゼロになり、実軸上の積分だけが残るのなら、積分を複素関数から実関数へと還元することができるからである。

経路 $A_2B_2C_2$

まず、先に下向きの積分経路 $A_2B_2C_2$ について考えていく。

$$\oint_{A_2B_2C_2} = \int_{A_2B_2} + \int_{C_2} \tag{6}$$

円弧の積分範囲は $\pi \leq \theta \leq 2\pi$、また $z = Re^{i\theta}$ とおき極座標系に書き直すと $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ より、積分は

$$I_{C_2} = \int_{C_2} \frac{ae^{-iz}}{a^2+z^2}dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{iaRe^{i\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}e^{-iRe^{i\theta}}d\theta \tag{7}$$

と書くことができる。次に $|I_{C_2}|$ を以下のように評価する。

$$|I_{C_2}| = \left|\int_{\pi}^{2\pi} \frac{iaRe^{i\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}e^{-iRe^{i\theta}}d\theta\right| \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|iaRe^{i\theta}|}{|a^2|+|R^2e^{2i\theta}|}\left|e^{-iRe^{i\theta}}\right|\left|d\theta\right|$$
$$\leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{aR}{a^2+R^2}e^{R\sin\theta}d\theta \tag{8}$$

各項の絶対値の計算：

$$
\begin{aligned}
|e^{i\theta}| &= |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{9}
$$

同様にして $|e^{2i\theta}| = 1$ となる。次に

$$
\begin{aligned}
\left|e^{-iRe^{i\theta}}\right| &= \left|e^{-iR(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = \left|e^{-iR\cos\theta}e^{R\sin\theta}\right| \\
&= e^{R\sin\theta}
\end{aligned} \tag{10}
$$

となる。

ここで範囲 $(\pi \leq \theta \leq 3\pi/2)$ においては常に $\sin\theta \leq -2(\theta - \pi)/\pi$ となる (Fig.2)。

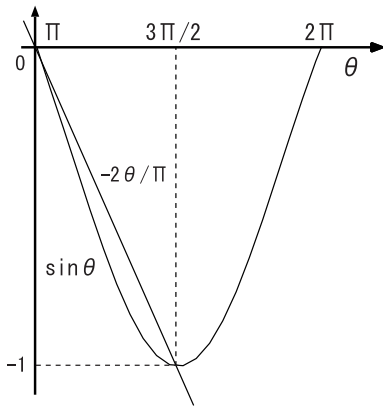

Fig.2：$\sin\theta \leq -2(\theta - \pi)/\pi$ $(\pi \leq \theta \leq 3\pi/2)$

よって (8) 式は

$$
|I_{C_2}| = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{aR}{a^2 + R^2} e^{R\sin\theta} d\theta \leq 2\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{aR}{a^2 + R^2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta \tag{11}
$$

(11) 式を積分すれば

$$
\begin{aligned}
2\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{aR}{a^2 + R^2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta &= \frac{2aR}{a^2 + R^2}\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\right]_{\pi}^{3\pi/2} \\
&= \frac{-\pi a}{a^2 + R^2}\left[e^{-3R} - e^{-2R}\right]
\end{aligned} \tag{12}
$$

よって、$R \to \infty$ とすると

$$
\lim_{R\to\infty} |I_{C_2}| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{-\pi a}{a^2 + R^2}\left[e^{-3R} - e^{-2R}\right] = 0 \tag{13}
$$

であるから、これより

$$\lim_{R\to\infty}|I_{C_2}|=0 \tag{14}$$

を得る。したがって、(6) 式の円弧の部分の積分はゼロとなり、実軸上の積分のみを考えれば良いことが分かる。実軸上なので複素数 z は実数 x で書け、

$$I_{A_2B_2}=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{ae^{-iz}}{a^2+z^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-ae^{-ix}}{a^2+x^2}dx \tag{15}$$

となる。よって、(15) 式と (5) 式より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ae^{-ix}}{a^2+x^2}dx=\pi e^{-a} \tag{16}$$

経路 $A_1B_1C_1$

次に上向きの経路 $A_1B_1C_1$ について考えていく。同様にして積分経路を実軸上の部分と円弧の部分とに分ける。

$$\oint_{A_1B_1C_1}=\int_{A_1B_1}+\int_{C_1} \tag{17}$$

経路 C_1 の積分範囲は $0\leq\theta\leq 2\pi$ よって

$$I_{C_1}=\int_{C_1}\frac{ae^{-iz}}{a^2+z^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{iaRe^{i\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}e^{-iRe^{i\theta}}d\theta \tag{18}$$

同様にして、ジョルダンの補題より $|I_{C_1}|$ は

$$|I_{C_1}|=\left|\int_0^{\pi}\frac{iaRe^{i\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}e^{-iRe^{i\theta}}d\theta\right|\leq\int_0^{\pi}\frac{aR}{a^2+R^2}e^{R\sin\theta}d\theta \tag{19}$$

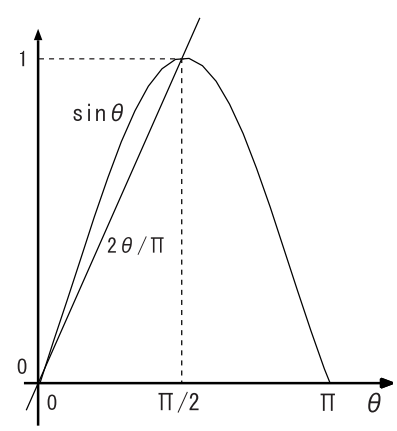

Fig.3：$\sin\theta\geq 2\theta/\pi$ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$

このとき、同様にして $\sin\theta$ を適当な線形関数に置き換えたいが、$\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ となってしまうため置き換えることができない (Fig.3)。これは積分範囲が $(0 \leq \theta \leq \pi)$ であることに起因している。このとき $R \to \infty$ の極限をとると $|I_{C_1}| \to \infty$ となり発散してしまう。つまり上向きに積分経路 $(A_1B_1C_1)$ をとった場合、その円弧の部分の積分はゼロに収束しない。したがって、実積分へと還元することはできないのである。

よって、この問題の場合、実積分へと還元しなければならないため上向きの積分経路をとることができないと考えられる。単純に (1) 式を解くだけなら、どちらの積分経路をとることも許される (ただし、経路の取り方によって解は異なる)。