不安定性成長率 γ の導出

準線形理論から Weibel 不安定性における不安定性成長率 γ を導出する。簡単のためイオンは背景粒子とし、速度の z 成分及び電場の縦成分は無視する。また、現象は完全に電磁的であるものとする。解析は cgs-Gauss 単位系で行う。Vlasov 方程式より

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{e}{m}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\Big) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{1}$$

ここで $f = f_0 + f_1$ とし、Vlasov 方程式を定常項と摂動項とに分ける。高次の項と電磁場の定常項を無視すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{e}{m}\Big(\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}_1\Big) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{2}$$

次に摂動項を平面波であると仮定する。

$$\boldsymbol{E}_1 = \tilde{\boldsymbol{E}}\exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \Omega_k t)] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \tilde{\boldsymbol{B}}\exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \Omega_k t)] \tag{4}$$

$$f_1 = \tilde{f}\exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \Omega_k t)] \tag{5}$$

ここで Ω_k は $\Omega_k = \omega_k + i\gamma_k$ で定義される複素振動数である。$(3), (4), (5)$ 式を Maxwell 方程式と Vlasov 方程式に代入すれば、

$$i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_1 = i\frac{\Omega_k}{c}\boldsymbol{B}_1 \tag{6}$$

$$i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_1 = \frac{4\pi}{c}e\int \boldsymbol{v} f_1 \mathrm{d}^3 v - i\Omega_k \boldsymbol{E}_1 \tag{7}$$

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}\Big] f_1 = -\frac{e}{m}\Big(\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}_1\Big) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{8}$$

を得る。(6) 式は (8) 式から電場 $\boldsymbol{E}_1$ を消去するのに用いる。すると (8) 式は

$$f_1 = \frac{eB_z}{imck}\frac{kv_y\frac{\partial}{\partial x} + (\Omega_k - kv_x)\frac{\partial}{\partial y}}{\Omega_k - kv_x} f_0 \tag{9}$$

となり、さらに (7) 式を用いれば以下の分散関係を得る。

$$c^2k^2 - \Omega_k^2 - \omega_{\mathrm{pe}} \int v_y \frac{kv_y\frac{\partial}{\partial x} + (\Omega_k - kv_x)\frac{\partial}{\partial y}}{\Omega_k - kv_x} f_0 \, \mathrm{d}^3 v = 0 \tag{10}$$

次に f_0 を

$$f_0(\boldsymbol{v},t)=\frac{1}{2\pi {v_x^{th}}^2 {v_y^{th}}^2}\exp\left[-\frac{v_x^2}{2{v_x^{th}}^2}-\frac{v_y^2}{2{v_y^{th}}^2}\right] \tag{11}$$

とし、積分すると

$$c^2k^2-\Omega_k^2+\omega_{\rm pe}^2\left[1-\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2-\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2\xi Z(\xi)\right]=0 \tag{12}$$

となる。ここで

$$Z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-\xi}e^{-z^2}\mathrm{d}z \tag{13}$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_k}{kv_x^{th}} \tag{14}$$

$Z(\xi)$ はプラズマ分散関数と呼ばれ、解析的に積分を行うことができないことが知られている。次に $t\to 0$ の極限を考え、高次の Ω_k^2 を無視し、$Z(\xi)$ の極限 $\xi\to 0$ から $i\sqrt{\pi}k/|k|$ を得る。このとき γ_k について整理すれば、無衝突プラズマでの線形成長率として以下を得る。

$$\gamma_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2|k|v_x^{th}\left[\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2-1-\left(\frac{ck}{\omega_{\rm pe}}\right)^2\right] \tag{15}$$

最大成長率は γ_k^c は、波長 k について偏微分することで得られる。偏微分すると

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2v_x^{th}\left[A-3\left(\frac{ck}{\omega_{\rm pe}}\right)^2\right]=0 \tag{16}$$

よって、

$$k=\frac{\omega_{\rm pe}}{c}\sqrt{\frac{A}{3}} \tag{17}$$

を得る。但し、ここで A は

$$A=\left(\frac{v_y^{th}}{v_x^{th}}\right)^2-1\qquad\left(v_y^{th}>v_x^{th}\right) \tag{18}$$

で定義され、異方性パラメータと呼ばれるものである。以上より γ_k の最大成長率は

$$\gamma_k^c=\sqrt{\frac{8}{27\pi}}\frac{v_x^{th}}{c}\frac{A^{3/2}}{A+1}\omega_{\rm pe} \tag{19}$$

となる。